

CUANTIZACIÓN POR INTEGRAL DE CAMINO DE LA TEORÍA DE DINÁMICA DE FORMAS EN 2+1 DIMENSIONES

Alejandro González Melan

Trabajo de Grado presentado como
requisito para optar al título de Magíster en Ciencias - Física

Director
Hernán Ocampo Durán
Dr. Rer. Nat.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2014

Director
Hernán Ocampo Durán
Dr. Rer. Nat.

Autor
Alejandro González Melan

Resumen

En este trabajo se calcula la integral de camino en un espacio de fase reducido, para la teoría de Dinámica de Formas en el toro en $2 + 1$ dimensiones. Para lo cual, primero se realiza una revisión del método de mejor apareamiento y del procedimiento de intercambio de simetrías, para luego construir la teoría de Dinámica de Formas a partir de la formulación ADM de la Relatividad General. Se muestra que, la integral de camino en el espacio de fase reducido para la teoría de Dinámica de Formas, concuerda con los resultados reportados para la formulación ADM. Adicionalmente se encuentra que el Hamiltoniano de la Dinámica de Formas permite establecer una relación directa entre los sistemas en los espacios de fase reducidos $\Gamma(\tau, V, p, \langle \pi \rangle)$ y $\Gamma(\tau, p)$, a través de la condición gauge de York.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Título | I |
| Resumen | II |
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Dinámica de formas | 2 |
| 2.1. Mejor apareamiento | 2 |
| 2.1.1. Representación Lagrangiana del procedimiento de mejor apareamiento | 4 |
| 2.1.2. Representación Hamiltoniana del procedimiento de mejor apareamiento | 6 |
| 2.2. Intercambio de simetrías | 8 |
| 2.3. Dinámica de Formas a partir de ADM | 10 |
| 2.3.1. Formulación ADM | 10 |
| 2.3.2. Intercambio de simetrías | 11 |
| 3. Dinámica de formas en 2+1 dimensiones | 15 |
| 3.1. Intercambio de simetrías | 15 |
| 3.2. Dinámica de Formas | 17 |
| 4. Integral de Camino para la Dinámica de Formas en 2+1 dimensiones | 19 |
| 4.1. Reducción del espacio de fase | 19 |
| 4.1.1. Sistema reducido del tipo (τ, V) | 26 |
| 4.1.2. Sistema reducido del tipo τ | 26 |
| 5. Conclusiones y perspectivas | 28 |
| A. Método de Dirac para sistemas restringidos | 29 |
| Bibliografía | 31 |

Capítulo 1

Introducción

La Dinámica de Formas [1,2] es una teoría de gravedad que es invariante conforme, cuya equivalencia con la teoría de la Relatividad General en su versión ADM [3], ha sido mostrada por Gomes y Koslowski mediante un procedimiento de intercambio de simetrías [4], que permite pasar de la invariancia bajo refoliaciones de ADM a una invariancia conforme en Dinámica de Formas.

La teoría de Dinámica de Formas está motivada en el trabajo de York sobre el problema de Cauchy [5,6] y en dos principios que provienen del estudio de las ideas de Mach [7] realizado por Barbour [8,9], los cuales son: 1. El movimiento y el tamaño son relativos y 2. El tiempo es derivado del cambio. Lo interesante de esta nueva teoría, es que las restricciones que aparecen, son funciones lineales en la variables dinámicas, lo cual es conveniente al momento de llevar a cabo un procedimiento de cuantización. Adicionalmente, esta teoría representa un escenario adecuado para el estudio conforme de la gravedad, lo que es útil para la comprensión de la dualidad entre teorías gauge y gravedad [10,11].

En este trabajo se estudian los aspectos generales para la construcción de la teoría de Dinámica de Formas y se determina su integral de camino en un espacio de fase reducido para el toro en $2 + 1$ dimensiones.

En el capítulo 2 se introduce el método de mejor apareamiento en su representación Lagrangiana y Hamiltoniana. Luego se presenta el procedimiento de intercambio de simetrías, el cual se aplica a la versión ADM de la Relatividad General, para obtener la teoría de Dinámica de Formas. En el capítulo 3 se construye la Dinámica de Formas en el caso de un toro en $2 + 1$ dimensiones, a partir de la formulación ADM. Finalmente, en el capítulo 4 se obtiene la integral de camino en un espacio de fase reducido, para la Dinámica de Formas en el toro en $2 + 1$ dimensiones.

Capítulo 2

Dinámica de formas

En este capítulo se presenta el método general para obtener la teoría de Dinámica de Formas, a partir de la teoría de Relatividad General en su versión ADM en $3 + 1$ dimensiones, mediante el procedimiento de intercambio de simetrías desarrollado por Gomes y Koslowski [4]. Para lo cual primero se introduce el concepto de mejor apareamiento, en su representación Lagrangiana y Hamiltoniana.

2.1. Mejor apareamiento

En esta sección se introduce el concepto de mejor apareamiento, con base en el trabajo de J. Barbour [2].

Uno de los problemas actuales en física teórica es el problema del tiempo en gravedad cuántica [12]. Éste ocurre debido a que el significado del tiempo en Relatividad General es diferente al que se le da en Mecánica Cuántica. El problema del tiempo ha motivado diversas estrategias de solución¹, una de las cuales, desarrollada por J. Barbour y colaboradores [8, 9], se basa en las ideas de Ernst Mach [7], resumidas en lo que Barbour denomina *principios de Mach* [8]. Estos principios están basados en la idea básica de que la dinámica de las cantidades físicas no depende de estructuras externas [7]. El primer principio establece que no hay espacio absoluto, solo las relaciones espaciales entre objetos importan. Mientras que el segundo principio trata del tiempo y establece que el flujo de éste es sólo una medida del cambio en las relaciones espaciales.

La teoría de Dinámica de Formas está fundamentada en estos dos principios, los cuales se implementan por medio de un procedimiento denominado *mejor apareamiento*. Para ver en que consiste este procedimiento, consideremos como ejemplo un sistema en un espacio Euclidiano de dimensión dos, compuesto únicamente de tres partículas, cuya configuración general siempre será un triángulo.

¹Para una revisión de los principales trabajos ver [13].

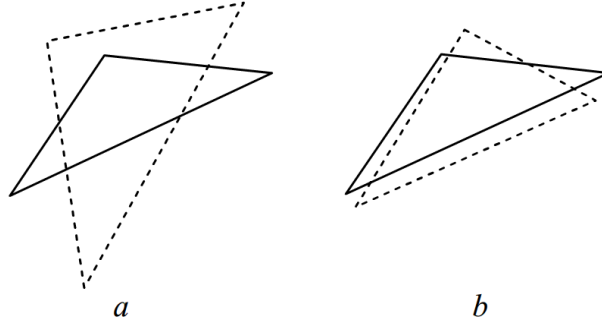


Figura 2.1: a) Configuración del sistema en dos instantes diferentes. b) Posición de mejor apareamiento del segundo triángulo.

De acuerdo con el primer principio de Mach, la descripción del sistema en un instante dado se puede hacer utilizando únicamente las posiciones relativas de las partículas, cuya medida se lleva a cabo empleando como unidad de medida una de las distancias entre dos partículas.

Para la introducción del segundo principio consideremos el sistema en un instante posterior (línea punteada Figura 2.1-a). Para describir la evolución del sistema necesitamos comparar las configuraciones en los dos instantes. Para ello seguimos el procedimiento de mejor apareamiento, el cual consiste en fijar uno de los dos triángulos, luego aplicar sobre el segundo traslaciones, rotaciones y dilataciones de forma que la “distancia” entre los vértices de ambos sea mínima² (Figura 2.1-b). Para ver esto de otra manera, tomemos un sistema de referencia para determinar las posiciones de las partículas

$$q_I^i(\lambda) \quad i = 1, 2; \quad I = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

donde el índice I identifica la partícula y el índice i su coordenada Euclidiana. Tendríamos entonces que el sistema es invariante bajo traslaciones, rotaciones y dilataciones dadas por

$$q_I^i(\lambda) \rightarrow G(\phi^\alpha(\lambda))_j^i q_I^j(\lambda), \quad \alpha = 1, \dots, 4 \quad (2.2)$$

siendo

$$G(\phi^\alpha(\lambda))_j^i = e^{\phi^\alpha(\lambda) t_{\alpha j}^i}, \quad (2.3)$$

donde los $t_{\alpha j}^i$ son los generadores del grupo de similitud en dos dimensiones.

La condición de mínima distancia entre vértices se puede escribir como

$$\min_\phi \{ \delta^{IJ} \eta_{ij} \delta q_I^i \delta q_J^j \}, \quad (2.4)$$

donde $\delta^{IJ} \eta_{ij}$ es una métrica plana en el espacio de configuraciones, y se ha definido

$$\delta q_I = G(\lambda + \delta\lambda) q_I(\lambda + \delta\lambda) - G(\lambda) q_I(\lambda). \quad (2.5)$$

²Asumiendo una distancia Euclidiana entre vértices.

En este caso, λ representa un parámetro que identifica las diferentes configuraciones del sistema. El valor de $\phi(\lambda)$ debe ser tal que minimice (2.4) para todo λ .

2.1.1. Representación Lagrangiana del procedimiento de mejor apareamiento

Consideremos ahora un $\delta\lambda$ infinitesimal, de forma que, al expandir la expresión (2.5) y retener los primeros términos obtenemos

$$\begin{aligned}\delta q_I &= (G + \dot{G}\delta\lambda)(q_I + \dot{q}_I\delta\lambda) - Gq_I \\ &= G\dot{q}_I\delta\lambda + \dot{G}q_I\delta\lambda,\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde el punto indica derivación con respecto a λ .

Definiendo el operador \mathcal{D}_ϕ como

$$\mathcal{D}_\phi q_I = G^{-1} \frac{\delta q_I}{\delta \lambda} = \dot{q}_I + G^{-1} \dot{G} q_I,\tag{2.7}$$

podemos introducir la acción

$$S = \int d\lambda \sqrt{\delta^{IJ} \eta_{ij} G_k^i \mathcal{D}_\phi q_I^k G_l^j \mathcal{D}_\phi q_J^l},\tag{2.8}$$

con la cual, la condición (2.4) se expresa como $\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0$. Por simplicidad en la notación escribimos

$$\frac{\delta q_I}{\delta \lambda} = G\dot{q}_I + \dot{G}q_I = \dot{\bar{q}}_I,\tag{2.9}$$

con $\bar{q}_I = Gq_I$. Así, (2.8) toma la forma

$$S = \int d\lambda \sqrt{\delta^{IJ} \eta_{ij} \dot{\bar{q}}_I^i \dot{\bar{q}}_J^j}.\tag{2.10}$$

De la variación de S con respecto a \bar{q} , obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{q}_I^i} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_I^i} = 0,\tag{2.11}$$

donde $L = \sqrt{\delta^{IJ} \eta_{ij} \dot{\bar{q}}_I^i \dot{\bar{q}}_J^j}$.

En la variación de S con respecto a ϕ , es necesario tener en cuenta que el valor de éste en cualquier intervalo infinitesimal a lo largo del intervalo de variación permanece arbitrario, debido a que los triángulos deben transformarse hasta ser llevados a su posición de mejor apareamiento. En otras palabras, $\delta\phi^\alpha$ no puede anularse en los extremos del intervalo de variación. Esto conduce, a que además de las ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial L}{\partial \phi^\alpha} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^\alpha} = 0,\tag{2.12}$$

se tenga la condición

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^\alpha} \right|_{\lambda_i}^{\lambda_f} = 0. \quad (2.13)$$

Como el procedimiento de mejor apareamiento debe ser independiente del intervalo de variación, obtenemos la condición de mejor apareamiento

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^\alpha} = 0. \quad (2.14)$$

Para generalizar a una teoría con interacción, podemos por ejemplo multiplicar la métrica plana en el espacio de configuración $\delta^{IJ}\eta_{ij}$ por el factor conforme $2(E - V(\bar{q}))$. Lo cual, como veremos más adelante es suficiente para reproducir la mecánica Newtoniana. De esta manera la acción (2.10) se reescribe como

$$S = 2 \int d\lambda \sqrt{(E - V(\bar{q}))T}, \quad (2.15)$$

donde $T = \frac{1}{2}\delta^{IJ}\eta_{ij}\dot{\bar{q}}_I^i\dot{\bar{q}}_J^j$. La acción (2.15), es la acción de Jacobi [14] cuando V es potencial usual del sistema.

La variación de la acción (2.15) con respecto a \bar{q} , nos lleva a las ecuaciones de movimiento

$$\sqrt{\frac{E - V}{T}} \frac{d}{d\lambda} \left(\sqrt{\frac{E - V}{T}} \frac{d\bar{q}_I^I}{d\lambda} \right) = -\frac{\partial V}{\partial \bar{q}_I^I}. \quad (2.16)$$

Notemos que, identificando

$$\frac{dt}{d\lambda} = \sqrt{\frac{T}{E - V}}, \quad (2.17)$$

la ecuación (2.16) se reduce a la segunda ley de Newton

$$\frac{d^2\bar{q}}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial \bar{q}}. \quad (2.18)$$

La elección (2.17), nos muestra que el procedimiento de mejor apareamiento permite relacionar el tiempo con el cambio en las configuraciones

$$\delta t = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\delta^{IJ}\eta_{ij}\delta q_I^i\delta q_J^j}{E - V}}, \quad (2.19)$$

en concordancia con el segundo principio de Mach.

2.1.2. Representación Hamiltoniana del procedimiento de mejor apareamiento

Consideremos el caso de un sistema de dimensión finita. Implementamos el procedimiento de mejor apareamiento introduciendo la transformación $\bar{q}^a = G_b^a q^b$, donde $G_b^a = e^{\phi^\alpha t_{\alpha b}^a}$. De forma que, en términos de la derivada $\mathcal{D}_\phi q = \dot{q} + \phi^\alpha t_\alpha q$, escribimos $\delta q^a / \delta \lambda = G_b^a \mathcal{D}_\phi q^b$. La acción que describe el sistema es

$$S = \int d\lambda \sqrt{\bar{g}_{ab} \mathcal{D}_\phi q^a \mathcal{D}_\phi q^b}, \quad (2.20)$$

donde $\bar{g}_{ab} = G_a^c g_{cd}(\bar{q}) G_b^d = g_{ab}$ asumiendo una métrica equivariante. Los momentos conjugados a q^a y ϕ^α , son respectivamente

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = \frac{g_{ab} \mathcal{D}_\phi q^b}{\sqrt{g_{cd} \mathcal{D}_\phi q^c \mathcal{D}_\phi q^d}}, \quad (2.21)$$

y

$$\pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^\alpha} = \frac{g_{ab} \mathcal{D}_\phi q^b t_{\alpha e}^a q^e}{\sqrt{g_{cd} \mathcal{D}_\phi q^c \mathcal{D}_\phi q^d}} = p_a t_{\alpha b}^a q^b, \quad (2.22)$$

donde se identifican las restricciones

$$\mathcal{H} \equiv g^{ab} p_a p_b - 1 = 0, \quad (2.23)$$

$$\mathcal{H}_\alpha \equiv \pi_\alpha - p_a t_{\alpha b}^a q^b = 0. \quad (2.24)$$

La restricción \mathcal{H}_α está asociada con las simetrías continuas y se relaciona con el primer principio de Mach, mientras que la restricción \mathcal{H} se relaciona con el segundo principio de Mach, como se verá más adelante.

Notemos además, que el Hamiltoniano obtenido por la transformación de Legendre es nulo

$$\begin{aligned} H &= p_a \dot{q}^a + \pi_\alpha \dot{\phi}^\alpha - L \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

lo cual es característico de las teorías invariantes bajo reparametrizaciones.

El Hamiltoniano total, de acuerdo con el método de Dirac (Apéndice A), está dado entonces como una combinación lineal de las restricciones (2.24) y (2.23)

$$H_T = N\mathcal{H} + N^\alpha \mathcal{H}_\alpha, \quad (2.26)$$

donde N y N^α son multiplicadores de Lagrange.

En el espacio de fase $\Gamma(q, \phi; p, \pi)$, la acción toma la forma

$$S = \int d\lambda \left(p_a \dot{q}^a + \pi_\alpha \dot{\phi}^\alpha - H_T \right). \quad (2.27)$$

Como se mencionó anteriormente, la variación de S con respecto a ϕ , manteniendo a éste libre a lo largo del intervalo de variación, implica la condición

$$\pi_\alpha \Big|_{\lambda_i}^{\lambda_f} = 0, \quad (2.28)$$

que, debido a la independencia del intervalo de variación, nos lleva a la condición de mejor apareamiento

$$\pi_\alpha(\lambda) = 0. \quad (2.29)$$

Adicionalmente, de acuerdo con los paréntesis de Poisson $\{q^a, p_b\} = \delta_b^a$ y $\{\phi^\alpha, \pi_\beta\} = \delta_\beta^\alpha$, tenemos las ecuaciones de movimiento

$$\dot{q}^a = \{q^a, H_T\} = 2Ng^{ab}p_b - N^\alpha t_{\alpha b}^a q^b, \quad (2.30)$$

$$\dot{p}_a = \{p_a, H_T\} = -N(\partial_a g^{bc})p_b p_c + N^\alpha p_b t_{\alpha a}^b, \quad (2.31)$$

$$\dot{\phi}^\alpha = \{\phi^\alpha, H_T\} = N^\alpha, \quad (2.32)$$

$$\dot{\pi}_\alpha = \{\pi_\alpha, H_T\} = 0. \quad (2.33)$$

De las ecuaciones (2.30) y (2.32), obtenemos

$$2Np_a = g_{ab}\dot{q}^b + g_{ab}\phi^\alpha t_{\alpha c}^b q^c, \quad (2.34)$$

que, utilizando $G_b^a = e^{\phi^\alpha t_{\alpha b}^a}$, se puede reescribir como

$$p_a = \frac{1}{2N} g_{ab} (G^{-1})_c^b \frac{\partial}{\partial \lambda} (G_d^c q^d). \quad (2.35)$$

En términos de

$$\bar{q}^a = G_b^a q^b, \quad (2.36)$$

$$\bar{p}_a = (G^{-1})_a^b p_b, \quad (2.37)$$

$$g_{ab}(\bar{q}) = (G^{-1})_a^c g_{cd} (G^{-1})_b^d, \quad (2.38)$$

la ecuación (2.35) toma la forma

$$\bar{p}_a = \frac{1}{2N} g_{ab}(\bar{q}) \dot{\bar{q}}^b. \quad (2.39)$$

Usando esta expresión y la ecuación (2.31), obtenemos

$$\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{2N} g_{ab}(\bar{q}) \dot{\bar{q}}^b \right) = -\bar{p}_b \bar{p}_c \bar{\partial}_a g^{bc}(\bar{q}). \quad (2.40)$$

Utilizando una métrica conformemente plana³ $g_{ab}(\bar{q}) = 2(E - V)\eta_{ab}$ y la restricción \mathcal{H} que ahora se escribe como $\eta^{ab}p_a p_b = 2(E - V)$, la ecuación (2.40) se reduce a

$$\frac{1}{N^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((E - V) \dot{\bar{q}}^a \right) = -\frac{1}{E - V} \bar{\partial}^a V, \quad (2.41)$$

³Donde η_{ab} es una métrica plana con signatura Euclidiana.

donde, si hacemos la identificación $\dot{\tau} = \frac{N}{E-V}$, obtenemos la segunda ley de Newton

$$\frac{\partial^2 \bar{q}^a}{\partial \tau^2} = -\bar{\partial}^a V. \quad (2.42)$$

Por último, notemos que reemplazando (2.35) en la restricción \mathcal{H} , encontramos que

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2} \sqrt{g_{ab}(\bar{q}) \dot{\bar{q}}^a \dot{\bar{q}}^b} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} (E - V) \eta_{ab} \dot{\bar{q}}^a \dot{\bar{q}}^b}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

con lo cual

$$\delta \tau = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \eta_{ab} \delta \bar{q}^a \delta \bar{q}^b}{E - V}}, \quad (2.44)$$

verificando nuevamente la consistencia con el segundo principio de Mach.

2.2. Intercambio de simetrías

En esta sección se presenta de forma general el procedimiento de intercambio de simetrías, conocido también como método de teoría de enlace [4].

Supongamos que tenemos una teoría con espacio de fase $\Gamma(q, p)$ y restricciones de primera clase

$$\chi_\mu(q, p) \approx 0. \quad (2.45)$$

Extendemos el espacio de fase introduciendo el campo ϕ_α y su momento conjugado π^α , los cuales satisfacen $\{\phi_\alpha, \pi^\beta\} = \delta_\alpha^\beta$. Para evitar introducir grados de libertad adicionales, se agrega la restricción

$$C^\alpha \equiv \pi^\alpha \approx 0. \quad (2.46)$$

Luego consideramos la transformación canónica $T_\phi : \{q, p; \phi, \pi\} \rightarrow \{Q, P; \Phi, \Pi\}$, cuya función generatriz es

$$F(q, \phi, P, \Pi) = P^a G_a^b(\phi) q_b + \phi_\alpha \Pi^\alpha. \quad (2.47)$$

De acuerdo con

$$Q_a = \frac{\partial F}{\partial P^a} \quad \Phi_\alpha = \frac{\partial F}{\partial \Pi^\alpha}, \quad (2.48)$$

$$p^a = \frac{\partial F}{\partial q_a} \quad \pi^\alpha = \frac{\partial F}{\partial \phi_\alpha}, \quad (2.49)$$

obtenemos las variables transformadas

$$q_a \rightarrow Q_a = G_a^b q_b, \quad (2.50)$$

$$p^a \rightarrow P^a = (G^{-1})_b^a p^b, \quad (2.51)$$

$$\phi_\alpha \rightarrow \Phi_\alpha = \phi_\alpha, \quad (2.52)$$

$$\pi^\alpha \rightarrow \Pi^\alpha = \pi^\alpha - M_a^{\alpha b} p^a q_b, \quad (2.53)$$

donde $M_a^{\alpha b} = (G^{-1})_c^a \frac{\partial G_c^b}{\partial \phi_\alpha}$.

Las restricciones transforman como

$$T_\phi \chi_\mu(q, p) \approx 0, \quad (2.54)$$

$$T_\phi C^\alpha = \pi^\alpha - M_a^{\alpha b} p^a q_b \approx 0, \quad (2.55)$$

las cuales continúan siendo de primera clase.

Supongamos ahora que las restricciones $T_\phi \chi_\mu(q, p)$, se pueden descomponer en dos grupos, $T_\phi \chi_\rho^1(q, p)$ y $T_\phi \chi_\sigma^2(q, p)$, donde $T_\phi \chi_\rho^1$ puede expresarse como $\phi_\alpha - \phi_\alpha^0 \approx 0$ y el paréntesis de Poisson entre $T_\phi \chi_\sigma^2$ y π^α se anula.

Podemos imponer dos condiciones gauge:

1. Imponiendo la condición gauge $\phi_\alpha = 0$, tenemos que $\{\phi_\alpha, T_\phi C^\beta\} = \delta_\alpha^\beta$, lo que implica que el multiplicador de Lagrange de $T_\phi C^\beta$ se debe anular por condición de propagación (Apéndice A). De esta manera, podemos realizar la reducción del espacio de fase fijando $(\phi_\alpha, \pi^\alpha) = (0, M_a^{\alpha b} p^a q_b)$ y remover la restricción $T_\phi C^\beta$. Por otro lado, como π^α no aparece en las restricciones $T_\phi \chi_\rho^1$ y $T_\phi \chi_\sigma^2$, éstas no se ven afectadas, por lo que después de la reducción del espacio de fase, se reducen al conjunto χ_μ . Con lo cual se recupera la teoría original.

2. Imponemos la condición gauge $\pi^\alpha = 0$, cuyo paréntesis de Poisson con las restricciones $T_\phi \chi_\sigma^2$ y $T_\phi C^\beta$ se anula. En este caso, la restricción $T_\phi \chi_\rho^1$ se remueve y se reduce el espacio de fase fijando $(\phi_\alpha, \pi^\alpha) = (\phi_\alpha^0, 0)$, después de lo cual, quedan las restricciones de primera clase

$$T_{\phi^0} \chi_\sigma^2(q, p) \approx 0, \quad (2.56)$$

$$D^\alpha \equiv M_a^{\alpha b}(\phi^0) p^a q_b \approx 0. \quad (2.57)$$

De esta manera, las restricciones $T_\phi \chi_\rho^1$ han sido reemplazadas por las restricciones D^α .

2.3. Dinámica de Formas a partir de ADM

En esta sección, se obtiene la teoría de Dinámica de Formas aplicando el método de intercambio de simetrías de la sección anterior, a la formulación ADM de la Relatividad General⁴ [3]. Con esto, lo que se busca es intercambiar la invariancia bajo refoliaciones de la teoría ADM, por una invariancia conforme cuyo generador es lineal en los momentos y posee un álgebra sencilla, a diferencia de lo que ocurre con el generador de las refoliaciones en ADM. Los argumentos principales de esta sección se pueden encontrar en [1, 4].

2.3.1. Formulación ADM

Consideremos la descripción ADM sobre una variedad Σ compacta y sin frontera. Las coordenadas del espacio de fase Γ son, la métrica g_{ab} y su densidad de momento conjugada π^{ab} , con paréntesis de Poisson

$$\{g_{ab}(x), \pi^{cd}(y)\} = \frac{1}{2}(\delta_a^c \delta_b^d + \delta_b^c \delta_a^d) \delta(x - y). \quad (2.58)$$

Denotando $S(N) = \int d^3x N(x)S(x)$ y $H(\xi) = \int d^3x \xi^a(x)H_a(x)$, el Hamiltoniano total ADM está dado por

$$H = S(N) + H(\xi), \quad (2.59)$$

donde N (lapso) y ξ^a (corrimiento), son multiplicadores de Lagrange. Las restricciones escalar y de difeomorfismos son respectivamente

$$S(x) = \frac{G_{abcd}(x)\pi^{ab}(x)\pi^{cd}(x)}{\sqrt{|g|}(x)} - \sqrt{|g|}(x)R[g](x), \quad (2.60)$$

$$H_a(x) = -2g_{ab}(x)D_c\pi^{bc}(x), \quad (2.61)$$

donde D_a es la derivada covariante compatible con g_{ab} , $R[g]$ es la curvatura escalar y $G_{abcd} = g_{ac}g_{bd} - \frac{1}{2}g_{ab}g_{cd}$ es la supermétrica de DeWitt con inversa $G^{abcd} = g^{ac}g^{bd} - g^{ab}g^{cd}$.

El álgebra de las restricciones está dada por

$$\{H(\xi), H(\zeta)\} = H(\mathcal{L}_\xi \zeta), \quad (2.62)$$

$$\{H(\xi), S(N)\} = S(\mathcal{L}_\xi N), \quad (2.63)$$

$$\{S(N), S(M)\} = H(K(N, M)), \quad (2.64)$$

donde \mathcal{L}_ξ es la derivada de Lie a lo largo del campo ξ y $K^a(N, M) = g^{ab}(N\partial_b M - M\partial_b N)$. Cabe resaltar que ésta no es un álgebra de Lie, ya que K^a no es constante puesto que depende de la métrica g_{ab} .

⁴ADM es una formulación canónica de la Relatividad General, en la que el espacio-tiempo se separa en espacio y tiempo. Los que no esten familiarizados con esta formulación pueden encontrar una discusión detallada en [15].

2.3.2. Intercambio de simetrías

De acuerdo con el procedimiento de intercambio de simetrías de la sección 2.2, se extiende el espacio de fase agregando el campo escalar ϕ y su densidad de momento conjugada π_ϕ , que satisfacen $\{\phi(x), \pi_\phi(y)\} = \delta(x-y)$. Adicionalmente, para asegurar que no se agreguen nuevos grados de libertad se incluye la restricción de primera clase

$$C(\rho) = \int d^3x \rho(x) \pi_\phi(x), \quad (2.65)$$

donde ρ es un multiplicador de Lagrange.

Se quiere intercambiar la simetría de refoliaciones por una simetría conforme parametrizada por ϕ . Sin embargo, para que una combinación de las restricciones escalares no sea fijada al imponer la condición de mejor apareamiento $\pi_\phi \approx 0$ y con la cual poder generar la dinámica de la teoría, es necesario que la simetría conforme empleada en el intercambio de simetrías, preserve el volumen total [1].

Para introducir la nueva simetría, primero definimos el valor medio para una función $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, de la forma

$$\langle f \rangle_g = \frac{1}{V} \int d^3x \sqrt{|g|} f, \quad (2.66)$$

donde $V = \int d^3x \sqrt{|g|}$. Notemos que la transformación conforme

$$g_{ab}(x) \rightarrow e^{4\hat{\phi}(x)} g_{ab}(x), \quad (2.67)$$

con $\hat{\phi}$ definido como

$$\hat{\phi} = \phi - \frac{1}{6} \ln \langle e^{6\phi} \rangle_g, \quad (2.68)$$

deja invariante el volumen. Esto se verifica fácilmente teniendo en cuenta la transformación

$$\sqrt{|g|} \rightarrow e^{6\hat{\phi}} \sqrt{|g|} = \frac{e^{6\phi}}{\langle e^{6\phi} \rangle_g} \sqrt{|g|}, \quad (2.69)$$

de donde se sigue que

$$V = \int d^3x \sqrt{|g|} \rightarrow \frac{1}{\langle e^{6\phi} \rangle_g} \int d^3x e^{6\phi} \sqrt{|g|} = V \frac{\langle e^{6\phi} \rangle_g}{\langle e^{6\phi} \rangle_g} = V. \quad (2.70)$$

Consideremos ahora la transformación canónica

$$T_{\hat{\phi}} : \{g_{ab}, \pi^{ab}; \phi, \pi_\phi\} \rightarrow \{G_{ab}, \Pi^{ab}; \Phi, \Pi_\Phi\}, \quad (2.71)$$

generada por la función

$$F(g, \phi; \Pi, \Pi_\phi) = \int d^3x \left(g_{ab}(x) e^{4\hat{\phi}(x)} \Pi^{ab}(x) + \phi(x) \Pi_\phi(x) \right). \quad (2.72)$$

Aplicando esta transformación en el espacio de fase extendido, obtenemos

$$G_{ab}(x) = e^{4\hat{\phi}(x)} g_{ab}(x), \quad (2.73)$$

$$\Pi^{ab}(x) = e^{-4\hat{\phi}(x)} \left[\pi^{ab}(x) - \frac{1}{3} \langle \pi \rangle \sqrt{|g|}(x) g^{ab}(x) \left(1 - e^{6\hat{\phi}(x)} \right) \right], \quad (2.74)$$

$$\Phi(x) = \phi(x), \quad (2.75)$$

$$\Pi_\Phi(x) = \pi_\phi(x) - 4 \left(\pi(x) - \langle \pi \rangle \sqrt{|g|}(x) \right). \quad (2.76)$$

La transformación de la restricción escalar y la restricción $C(\rho)$ no conlleva mayor inconveniente. En el caso de la restricción de difeomorfismos, los cálculos se simplifican si primero la reescribimos de la forma

$$H(\xi) = \int d^3x \pi^{ab} (\mathcal{L}_\xi g)_{ab}. \quad (2.77)$$

Las restricciones transformadas se escriben entonces como

$$\begin{aligned} T_{\hat{\phi}} S(N) = \int d^3x N \left\{ \frac{e^{-6\hat{\phi}}}{\sqrt{|g|}} \left[G_{abcd} \pi^{ab} \pi^{cd} - \frac{1}{6} \left(\pi - \langle \pi \rangle \sqrt{|g|} (1 - e^{6\hat{\phi}}) \right)^2 + \frac{1}{6} \pi^2 \right] \right. \\ \left. - e^{2\hat{\phi}} \sqrt{|g|} \left[R[g] - 8 \left(\nabla^2 \hat{\phi} + (\nabla \hat{\phi})^2 \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$T_{\hat{\phi}} H(\xi) = \int d^3x \left(\pi^{ab} (\mathcal{L}_\xi g)_{ab} + \pi_\phi \mathcal{L}_\xi \phi \right), \quad (2.79)$$

$$T_{\hat{\phi}} C(\rho) = \int d^3x \rho \left[\pi_\phi - 4 \left(\pi - \langle \pi \rangle \sqrt{|g|} \right) \right], \quad (2.80)$$

donde $\pi = \pi^{ab} g_{ab}$ y $\langle \pi \rangle = \frac{1}{V} \int d^3x \pi$.

Regresar a la Relatividad General

Para regresar a la Relatividad General en su forma ADM, se impone la condición gauge $\phi = 0$. Después de esto, el único paréntesis de Poisson que no se anula es

$$\{T_{\hat{\phi}} C(\rho), \phi(x)\} = \rho(x), \quad (2.81)$$

lo que determina que el multiplicador de Lagrange ρ se anula. La reducción del espacio de fase se lleva a cabo fijando

$$\phi \equiv 0, \quad (2.82)$$

$$\pi_\phi \equiv 4 \left(\pi - \langle \pi \rangle \sqrt{|g|} \right), \quad (2.83)$$

lo cual remueve la restricción $T_{\hat{\phi}} C$ y reduce las restricciones $T_{\hat{\phi}} S$ y $T_{\hat{\phi}} H_a$ a (2.60) y (2.61) respectivamente. Obteniendo de nuevo el Hamiltoniano ADM

$$H = S(N) + H(\xi). \quad (2.84)$$

Obtener la Dinámica de Formas

Para obtener la Dinámica de Formas, se impone la condición gauge $\pi_\phi = 0$. En este caso, el único paréntesis de Poisson para π_ϕ , que no se anula es

$$\{T_{\hat{\phi}}S(N), \pi_\phi(x)\} = F_N(x) - e^{6\hat{\phi}(x)}\sqrt{|g|}(x)\langle F_N \rangle, \quad (2.85)$$

donde

$$\begin{aligned} F_N = & -8\sqrt{|g|}e^{2\hat{\phi}} \left[R[g] - 8 \left(\nabla^2 \hat{\phi} + (\nabla \hat{\phi})^2 \right) \right] N + 8\sqrt{|g|}g_{ab}\partial^b \left(e^{2\hat{\phi}}\partial^a N \right) \\ & - 2\langle \pi \rangle \left[\pi - \langle \pi \rangle \sqrt{|g|}(1 - e^{6\hat{\phi}}) \right] N - 6T_{\hat{\phi}}SN. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Esta expresion se puede reescribir como

$$\begin{aligned} F_N = & -8\sqrt{|g|}e^{2\hat{\phi}}\bar{R}[g]N - 2\langle \pi \rangle^2\sqrt{|g|}e^{6\hat{\phi}}N \\ & + 8\sqrt{|g|}g_{ab}\partial^b \left(e^{2\hat{\phi}}\partial^a N \right) - \left[6T_{\hat{\phi}}S + 2\langle \pi \rangle Q \right] N, \end{aligned} \quad (2.87)$$

donde $\bar{R} = R - 8(\nabla^2 \hat{\phi} - (\nabla \hat{\phi})^2)$, y

$$Q(x) \equiv \pi(x) - \langle \pi \rangle \sqrt{|g|}(x) \approx 0, \quad (2.88)$$

es la restricción a la cual se reduce $T_{\hat{\phi}}C$ después de fijar $\pi_\phi = 0$.

Así, la condición para determinar los multiplicadores de Lagrange

$$\{T_{\hat{\phi}}S(N), \pi_\phi(x)\} = 0, \quad (2.89)$$

nos lleva a la ecuación

$$e^{-4\hat{\phi}}\bar{R}N + \frac{1}{4}\langle \pi \rangle^2 N + e^{-6\hat{\phi}}g_{ab}\partial^b \left(e^{2\hat{\phi}}\partial^a N \right) \approx \langle \mathcal{G} \rangle, \quad (2.90)$$

donde \mathcal{G} es igual al lado izquierdo de (2.90) multiplicado por $\sqrt{|g|}e^{6\hat{\phi}}$.

La ecuación (2.90) ha sido ampliamente estudiada y se sabe que posee solución única positiva⁵ [16–18], la cual denotaremos como N_0 .

De esta forma, la restricción $T_{\hat{\phi}}S(N)$ se separa en la restricción de primera clase $T_{\hat{\phi}}S(N_0)$ y las restricciones de segunda clase $\widetilde{T_{\hat{\phi}}S}(x)$ definidas como

$$\widetilde{T_{\hat{\phi}}S}(x) = T_{\hat{\phi}}S(x) - T_{\hat{\phi}}S(N_0) \frac{\sqrt{|g|}e^{6\hat{\phi}(x)}}{V}. \quad (2.91)$$

⁵Para las condiciones iniciales y de frontera adecuadas, las cuales no consideraremos aquí.

La reducción del espacio de fase se lleva a cabo fijando $\pi_\phi = 0$ y encontrando un $\hat{\phi}_0$ tal que $\widetilde{T_{\hat{\phi}_0} S}(x) \approx 0$. Escribiendo entonces $T_{\hat{\phi}} S(x)$ en términos de $\hat{\phi}_0$ y Q , obtenemos

$$\begin{aligned} T_{\hat{\phi}_0} S &= \frac{e^{-6\hat{\phi}_0}}{\sqrt{|g|}} \left[G_{abcd} \pi^{ab} \pi^{cd} - \frac{1}{6} \left(\pi - \langle \pi \rangle \sqrt{|g|} (1 - e^{6\hat{\phi}_0}) \right)^2 + \frac{1}{6} \pi^2 \right] - e^{2\hat{\phi}_0} \sqrt{|g|} \bar{R} \\ &= \frac{e^{-6\hat{\phi}_0}}{\sqrt{|g|}} \left[\sigma^{ab} \sigma_{ab} - \frac{1}{2} Q^2 - \frac{1}{3} Q \langle \pi \rangle \sqrt{|g|} e^{6\hat{\phi}_0} - \frac{1}{6} \langle \pi \rangle^2 |g| e^{12\hat{\phi}_0} \right] - e^{2\hat{\phi}_0} \sqrt{|g|} \bar{R}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

donde $\sigma^{ab} = \pi^{ab} - \frac{1}{3} \langle \pi \rangle g^{ab} \sqrt{|g|}$.

De esta manera, la condición $\widetilde{T_{\hat{\phi}_0} S}(x) \approx 0$ toma la forma

$$\frac{e^{-6\hat{\phi}_0}}{\sqrt{|g|}} \left(\sigma^{ab} \sigma_{ab} - \frac{1}{6} \langle \pi \rangle^2 |g| e^{12\hat{\phi}_0} - e^{8\hat{\phi}_0} |g| \bar{R} \right) \approx \langle \mathcal{L} \rangle, \quad (2.93)$$

donde \mathcal{L} es igual al término entre paréntesis del lado izquierdo. La posibilidad de determinar $\hat{\phi}_0$ se garantiza, debido a que (2.93) es la ecuación de Lichnerowicz-York, de la cual se conoce que tiene solución única [17, 19]. Así, la reducción del espacio de fase se obtiene fijando $\pi_\phi = 0$ y $\hat{\phi} = \hat{\phi}_0$. Con esto, $T_{\hat{\phi}} H_a$ se reduce a H_a , y $T_{\hat{\phi}} C$ se reduce a Q . Adicionalmente, identificando la restricción de primera clase restante, con el Hamiltoniano $H_{SD} = T_{\hat{\phi}_0} S(N_0)$, llegamos finalmente al Hamiltoniano total de Dinámica de Formas

$$H = \eta H_{SD} + H(\xi) + Q(\rho), \quad (2.94)$$

con η un multiplicador de Lagrange constante y

$$H_{SD} = \int d^3x N_0 T_{\hat{\phi}_0} S(x), \quad (2.95)$$

$$H(\xi) = \int d^3x \pi^{ab}(x) (\mathcal{L}_\xi g)_{ab}(x), \quad (2.96)$$

$$Q(\rho) = \int d^3x \rho(x) \left(\pi(x) - \langle \pi \rangle \sqrt{|g|}(x) \right), \quad (2.97)$$

donde la restricción Q es la que genera la simetría conforme. Los paréntesis de Poisson no triviales de las restricciones son

$$\{H(\xi), H(\zeta)\} = H(\mathcal{L}_\xi \zeta), \quad (2.98)$$

$$\{H(\xi), Q(\rho)\} = Q(\mathcal{L}_\xi \rho). \quad (2.99)$$

De esta forma se ha obtenido una teoría donde las restricciones H_a y Q son lineales en los momentos y cuya álgebra es un álgebra de Lie.

Capítulo 3

Dinámica de formas en 2+1 dimensiones

Debido a que la gravedad en 2+1 dimensiones es un modelo no trivial, con solución exacta y cuantizable que se conoce ampliamente [20, 21], representa un terreno de prueba ideal para el estudio de cualquier nueva teoría de gravedad. Por esta razón, es interesante el estudio de la Dinámica de Formas en 2+1 dimensiones. En este capítulo nos concentraremos en particular en el caso de un toro en 2 + 1 dimensiones, donde el Hamiltoniano de la Dinámica de Formas se puede obtener en forma explícita [22].

3.1. Intercambio de simetrías

En esta sección se obtiene la teoría de Dinámica de formas, a partir de la descripción ADM de Relatividad General, definida en un espacio-tiempo de 2+1 dimensiones con topología $[0, 1] \times T^2$, donde T^2 es el 2-toro. El Hamiltoniano ADM está dado por

$$H = S(N) + H(\xi), \quad (3.1)$$

$$S(N) = \int d^2x N \left(\frac{G_{abcd} \pi^{ab} \pi^{cd}}{\sqrt{|g|}} - \sqrt{|g|} R[g] \right), \quad (3.2)$$

$$H(\xi) = \int d^2x \pi^{ab} (\mathcal{L}_\xi g)_{ab}, \quad (3.3)$$

donde $S(N)$ y $H(\xi)$, nuevamente representan las restricciones escalar y de difeomorfismos, respectivamente. Además, g_{ab} y π^{ab} son las variables del espacio de fase y $G_{abcd} = g_{ac}g_{bd} - g_{ab}g_{cd}$ es la supermétrica 2 dimensional.

Siguiendo un procedimiento análogo al de la sección 2.3, empleamos el método de intercambio de simetrías. Para ello, extendemos el espacio de fase, introduciendo el campo escalar ϕ y su densidad de momento conjugada π_ϕ . Luego, agregamos la

restricción

$$C(\rho) = \int d^2x \rho(x) \pi_\phi(x), \quad (3.4)$$

y utilizamos la transformación canónica $T_{\hat{\phi}} : \{g_{ab}, \pi^{ab}; \phi, \pi_\phi\} \rightarrow \{G_{ab}, \Pi^{ab}; \Phi, \Pi_\Phi\}$ generada por

$$F(g, \phi; \Pi, \Pi_\phi) = \int d^2x \left(g_{ab}(x) e^{2\hat{\phi}(x)} \Pi^{ab}(x) + \phi(x) \Pi_\phi(x) \right), \quad (3.5)$$

donde $\hat{\phi} = \phi - \frac{1}{2} \ln \langle e^{2\phi} \rangle_g$, el valor medio es definido por $\langle f \rangle_g = \frac{1}{V} \int d^2x \sqrt{|g|} f$ y $V = \int d^2x \sqrt{|g|}$. Al aplicar la transformación obtenemos

$$G_{ab}(x) = e^{2\hat{\phi}(x)} g_{ab}(x), \quad (3.6)$$

$$\Pi^{ab}(x) = e^{-2\hat{\phi}(x)} \left[\pi^{ab}(x) - \frac{1}{2} \langle \pi \rangle \sqrt{|g|}(x) g^{ab}(x) (1 - e^{2\hat{\phi}(x)}) \right], \quad (3.7)$$

$$\Phi(x) = \phi(x), \quad (3.8)$$

$$\Pi_\Phi(x) = \pi_\phi(x) - 2 \left(\pi(x) - \langle \pi \rangle \sqrt{|g|}(x) \right), \quad (3.9)$$

donde $\pi = \pi^{ab} g_{ab}$ y $\langle \pi \rangle = \frac{1}{V} \int d^2x \pi$.

En el caso de las restricciones, encontramos que

$$\begin{aligned} T_{\hat{\phi}} S(N) = \int d^2x N \left\{ \frac{e^{-2\hat{\phi}}}{\sqrt{|g|}} \left[G_{abcd} \pi^{ab} \pi^{cd} - \frac{1}{2} \left(\pi - \langle \pi \rangle \sqrt{|g|} (1 - e^{2\hat{\phi}}) \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \pi^2 \right] - \sqrt{|g|} (R[g] - 2 \nabla^2 \hat{\phi}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$T_{\hat{\phi}} H(\xi) = \int d^2x \left(\pi^{ab} (\mathcal{L}_\xi g)_{ab} + \pi_\phi \mathcal{L}_\xi \phi \right), \quad (3.11)$$

$$T_{\hat{\phi}} C(\rho) = \int d^2x \rho \left[\pi_\phi - 2 \left(\pi - \langle \pi \rangle \sqrt{|g|} \right) \right], \quad (3.12)$$

Se verifica facilmente que la formulación ADM se recupera fijando

$$\phi \equiv 0, \quad (3.13)$$

$$\pi_\phi \equiv 2 \left(\pi - \langle \pi \rangle \sqrt{|g|} \right). \quad (3.14)$$

3.2. Dinámica de Formas

Para obtener la Dinámica de Formas se debe imponer la condición gauge $\pi_\phi = 0$ y fijar $\hat{\phi} = \hat{\phi}_0$, con lo cual, la restricción $T_{\hat{\phi}}S$ se reduce a

$$T_{\hat{\phi}_0}S(N) = \int d^2x N \left[\frac{e^{-2\hat{\phi}_0}}{\sqrt{|g|}} \left(G_{abcd} \pi^{ab} \pi^{cd} - \frac{1}{2} \langle \pi \rangle^2 |g| e^{4\hat{\phi}_0} + \frac{1}{2} \pi^2 \right) - \sqrt{|g|} (R[g] - 2\nabla^2 \hat{\phi}_0) \right], \quad (3.15)$$

la restricción $T_{\hat{\phi}}H(\xi)$ vuelve a ser $H(\xi)$ y la restricción $T_{\hat{\phi}}C(\rho)$ se reduce a

$$Q(\rho) = \int d^2x \rho \left(\pi - \langle \pi \rangle \sqrt{|g|} \right). \quad (3.16)$$

Antes de continuar, aprovechamos el hecho de que cualquier métrica en una superficie compacta es conforme a una métrica de curvatura (intrínseca) constante [23], para escribir (salvo difeomorfismos)

$$g_{ab} = e^{2\lambda} \bar{g}_{ab}, \quad (3.17)$$

donde λ es un factor conforme y \bar{g}_{ab} para el toro es una métrica plana.

Utilizando (3.17), la restricción escalar (3.15) toma la forma

$$T_{\hat{\phi}_0}S(N) = \int d^2x N \left[\frac{e^{-2(\hat{\phi}_0+\lambda)}}{\sqrt{|\bar{g}|}} \left(e^{4\lambda} \bar{G}_{abcd} \pi^{ab} \pi^{cd} - \frac{1}{2} \langle \pi \rangle^2 |\bar{g}| e^{4(\hat{\phi}_0+\lambda)} + \frac{1}{2} e^{4\lambda} \pi^2 \right) + 2\sqrt{|\bar{g}|} \bar{\nabla}^2 (\hat{\phi}_0 + \lambda) \right], \quad (3.18)$$

donde $\pi = \pi^{ab} \bar{g}_{ab}$ y $\bar{\nabla}^2$ es el laplaciano con respecto a \bar{g}_{ab} .

Como se vio en la sección 2.3, después de imponer la condición $\pi_\phi = 0$, una de las restricciones $TS(x)$ continúa siendo de primera clase, debido a que existe un N_0 que satisface $\{T_{\hat{\phi}}S(N_0), \pi_\phi(x)\} = 0$. Las restricciones de segunda clase contenidas en $T_{\hat{\phi}}S$ se pueden extraer definiendo

$$\widetilde{T_{\hat{\phi}_0}S}(x) = T_{\hat{\phi}_0}S(x) - T_{\hat{\phi}_0}S(N_0) \frac{\sqrt{|\bar{g}|}(x) e^{2(\hat{\phi}_0(x)+\lambda(x))}}{V}. \quad (3.19)$$

Adicionalmente, la reducción del espacio de fase requiere fijar $\hat{\phi} = \hat{\phi}_0$, donde $\widetilde{T_{\hat{\phi}_0}S}(x) \approx 0$. Imponiendo esta condición en (3.19) y definiendo el Hamiltoniano de la Dinámica de Formas como $H_{SD} = T_{\hat{\phi}_0}S(N_0)$, obtenemos

$$T_{\hat{\phi}_0}S(x) - H_{SD} \frac{\sqrt{|\bar{g}|}(x) e^{2(\hat{\phi}_0(x)+\lambda(x))}}{V} = 0. \quad (3.20)$$

Seguindo a [22], tomamos $\hat{\phi}_0 + \lambda$ constante en el espacio, con lo cual, la expresión

$$V = \int d^2x \sqrt{|\bar{g}|} e^{2(\hat{\phi}_0 + \lambda)}, \quad (3.21)$$

nos permite determinar

$$\hat{\phi}_0 = -\lambda + \frac{1}{2} \ln V, \quad (3.22)$$

de manera que H_{SD} se obtiene a partir de (3.20), como¹

$$H_{SD} = \int d^2x \left(\frac{e^{4\lambda} G_{abcd} \pi^{ab} \pi^{cd}}{V|g|} - \frac{V}{2} \langle \pi \rangle^2 + \frac{1}{2} \frac{e^{4\lambda} \pi^2}{V|g|} \right). \quad (3.23)$$

Finalmente, el Hamiltoniano total para la Dinámica de Formas está dado por

$$H = \eta H_{SD} + H(\xi) + Q(\rho), \quad (3.24)$$

donde η es un multiplicador de Lagrange constante.

En este punto, la expresión para el Hamiltoniano (3.23) difiere de la obtenida en [22], debido a que aún no se ha escogido de manera explícita la métrica plana \bar{g}_{ab} . Esto se llevará a cabo en el siguiente capítulo.

¹En adelante se utiliza $\pi = \pi^{ab} g_{ab}$.

Capítulo 4

Integral de Camino para la Dinámica de Formas en $2 + 1$ dimensiones

En este capítulo, se calcula la integral de camino en un espacio de fase reducido para la teoría de Dinámica de Formas, empleando el método de Faddeev-Popov [24]. El análisis se realiza para el caso de un toro en $2 + 1$ dimensiones. Este desarrollo sirve como complemento a la cuantización de la Dinámica de Formas en $2 + 1$ dimensiones empleando el método de Dirac, llevada a cabo en [22]. Los resultados obtenidos aquí concuerdan con lo reportado en [25–28] para la formulación ADM de la Relatividad General.

4.1. Reducción del espacio de fase

El punto de partida es la integral de camino para la teoría de Dinámica de Formas en $2 + 1$ dimensiones en el espacio de fase $\Gamma(g_{ab}, \pi^{ab})$, dada por

$$Z = \mathcal{N} \int [dg_{ab}][d\pi^{ab}][d\eta][d\xi][d\rho] e^{iS}, \quad (4.1)$$

con la acción

$$S = \int dt d^2x \left(\pi^{ab} \dot{g}_{ab} - \eta H_{SD} - \xi^a H_a - \rho Q \right), \quad (4.2)$$

donde, de acuerdo con la sección 3.2

$$H_{SD}(x) = \frac{e^{4\lambda} G_{abcd} \pi^{ab} \pi^{cd}}{V|g|} - \frac{V}{2} \langle \pi \rangle^2 + \frac{1}{2} \frac{e^{4\lambda} \pi^2}{V|g|}, \quad (4.3)$$

$$H_a(x) = -2g_{ab} D_c \pi^{bc}, \quad (4.4)$$

$$Q(x) = \pi - \langle \pi \rangle \sqrt{|g|}. \quad (4.5)$$

La acción (4.2) es invariante bajo difeomorfismos espaciales y transformaciones conformes, generadas por las restricciones $\chi_\alpha = (H_\alpha, Q)$. Esto significa que las superficies equivalentes bajo estas simetrías, contribuyen en forma idéntica a la suma en (4.1) y no deben ser contadas como configuraciones independientes, puesto que este sobreconteo produciría un resultado divergente. Con el fin de restringir la integral (4.1) a un espacio de dimensión finita, utilizamos el método de Faddeev-Popov [24], para separar el espacio de todas las geometrías en clases de equivalencia, y de esta manera, extraer los volúmenes asociados a los difeomorfismos y a las transformaciones conformes, para ser absorbidos en la constante de normalización \mathcal{N} .

Lo primero que debemos hacer es imponer las condiciones gauge $\sigma^\alpha = 0$ para las restricciones χ_α . Esto se efectúa introduciendo en la integral de camino el factor

$$\delta[\sigma^\alpha] \det |\{\chi_\alpha, \sigma^\beta\}|. \quad (4.6)$$

Necesitamos además definir el producto interno para escalares s , vectores v^a y tensores simétricos sin traza w^{ab}

$$\begin{aligned} \langle s_1, s_2 \rangle &= \int d^2x \sqrt{|g|} s_1 s_2, \\ \langle v_1, v_2 \rangle &= \int d^2x \sqrt{|g|} g_{ab} v_1^a v_2^b, \\ \langle w_1, w_2 \rangle &= \int d^2x \sqrt{|g|} g_{ac} g_{bd} w_1^{ab} w_2^{cd}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

También definimos las normalizaciones Gaussianas

$$\int [d\delta g_{ab}] \exp \left\{ i \int d^2x \sqrt{|g|} g^{ac} g^{bd} \delta g_{ab} \delta g_{cd} \right\} = 1, \quad (4.8)$$

$$\int [d\pi^{ab}] \exp \left\{ i \int d^2x g_{ac} g_{bd} \pi^{ab} \pi^{cd} / \sqrt{|g|} \right\} = 1, \quad (4.9)$$

donde los δg_{ab} son elementos del espacio tangente al espacio de las métricas g_{ab} .

La integración sobre ξ y ρ nos lleva a¹

$$\begin{aligned} Z &= \mathcal{N} \int [dg_{ab}] [d\pi^{ab}] [d\eta] \delta[H_\alpha / \sqrt{|g|}] \delta[Q / \sqrt{|g|}] \\ &\quad \delta[\sigma^\alpha] \det |\{\chi_\alpha, \sigma^\beta\}| \exp \left\{ i \int dt d^2x (\pi^{ab} \dot{g}_{ab} - \eta H_{SD}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ahora consideremos una variación infinitesimal arbitraria de la métrica

$$\delta g_{ab} = \delta_W g_{ab} + \delta_D g_{ab} + \delta_T g_{ab}, \quad (4.11)$$

¹Donde el factor $1/\sqrt{|g|}$ en $\delta[H_\alpha / \sqrt{|g|}]$ y $\delta[Q / \sqrt{|g|}]$ viene de la definición de los productos (4.7) y la regla $\int [da] e^{i(a,b)} = \delta[b]$.

donde los dos primeros términos corresponden transformaciones gauge, siendo

$$\delta_W g_{ab} = 2\delta\lambda g_{ab}, \quad (4.12)$$

la variación de la métrica bajo el reescalamiento infinitesimal de Weyl, y

$$\delta_D g_{ab} = D_a \delta v_b + D_b \delta v_a, \quad (4.13)$$

la variación debida a los difeomorfismos generados por δv .

El grupo de reescalamientos de Weyl en el toro, lo denotaremos como $\text{Weyl}(T^2)$, mientras que el grupo de difeomorfismos lo denotaremos como $\text{Diff}(T^2)$. Notemos además que, como estamos considerando difeomorfismos infinitesimales, la transformación (4.13) pertenece al subgrupo de difeomorfismos conexos a la identidad $\text{Diff}_0(T^2)$ y no al grupo completo $\text{Diff}(T^2)$.

El tercer término en (4.11), representa la variación física, conocida como deformación de Teichmüller [29], que se escribe como

$$\delta_T g_{ab} = \delta\tau^i \frac{\partial g_{ab}}{\partial \tau^i}, \quad (4.14)$$

donde (τ_1, τ_2) parametrizan el espacio de Teichmüller².

Por conveniencia, las trazas de $\delta_D g_{ab}$ y $\delta_T g_{ab}$ se absorben en $\delta_W g_{ab}$ definiendo

$$\delta\lambda \equiv \delta\lambda + \frac{1}{2} D_c \delta v^c + \frac{1}{2} \delta\tau^i g^{cd} \frac{\partial g_{cd}}{\partial \tau^i}, \quad (4.15)$$

con lo cual, (4.11) se reescribe como

$$\delta g_{ab} = 2\delta\lambda g_{ab} + (P\delta v)_{ab} + \delta\tau^i T_{iab}, \quad (4.16)$$

donde T_{iab} es la parte sin traza de la deformación de Teichmüller

$$T_{iab} = \frac{\partial g_{ab}}{\partial \tau^i} - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \frac{\partial g_{cd}}{\partial \tau^i}, \quad (4.17)$$

y el operador P , que aplica vectores en tensores simétricos sin traza, es definido como [30]

$$(P\delta v)_{ab} = D_a \delta v_b + D_b \delta v_a - g_{ab} D_c \delta v^c, \quad (4.18)$$

cuyo adjunto, de acuerdo con la definición de los productos (4.7), está dado por

$$(P^\dagger w)_a = -2D^b w_{ab}. \quad (4.19)$$

²El espacio de Teichmüller se puede definir como el cociente $\mathcal{M}_g/(\text{Weyl}(\Sigma_g) \times \text{Diff}_0(\Sigma_g))$, donde \mathcal{M}_g es el espacio de las métricas Riemannianas sobre una superficie compacta, sin frontera, de género g (Σ_g). De acuerdo con el teorema de Riemann-Roch, la dimensión (real) del espacio de Teichmüller para el toro es 2, igual que la dimensión del espacio moduli [29].

Para simplificar los cálculos, es conveniente conseguir que la descomposición (4.16) sea ortogonal³. Para ello, notemos que los elementos $\{\psi^r\}_{r=1,2}$ que forman una base para $\ker P^\dagger$ ⁴, son ortogonales a $(P\delta v)_{ab}$. Esto se ve fácilmente de

$$0 = \langle \delta v, P^\dagger \psi \rangle = \langle P\delta v, \psi \rangle. \quad (4.20)$$

Con esto en mente, realizamos la descomposición

$$T_{ab}^i = N^i (P\delta v)_{ab} + M_{jk}^{-1} \langle \psi^j, T^i \rangle \psi_{ab}^k, \quad (4.21)$$

donde $N^i = \frac{\langle P v, T^i \rangle}{\langle P v, P v \rangle}$ y $M_{jk} = \langle \psi_j, \psi_k \rangle$.

Obteniendo la descomposición ortogonal para la variación de la métrica

$$\delta g_{ab} = 2\delta\lambda g_{ab} + (P\delta v)_{ab} + \delta\tau^i M_{jk}^{-1} \langle \psi^j, T_i \rangle \psi_{ab}^k, \quad (4.22)$$

donde se ha redefinido $\delta v \equiv (1 + \delta\tau^i N_i)\delta v$

Para la densidad de momento, elegimos una descomposición de la forma

$$\pi^{ab} = \frac{1}{2}\pi g^{ab} + \sqrt{|g|}(PY)^{ab} + \sqrt{|g|}p_i \psi^{iab}, \quad (4.23)$$

donde ψ^{iab} es transversal y sin traza respecto a una métrica plana \bar{g}_{ab} que se especificará más adelante. La descomposición (4.23) se realiza siguiendo el procedimiento general descrito en [18]⁵.

En este punto es importante tener en cuenta que, para el toro existe una intersección no vacía entre los grupos $\text{Diff}_0(T^2)$ y $\text{Weyl}(T^2)$, la cual se identifica con el conjunto de los vectores de Killing conformes (CKV), cuya dimensión para el toro es de 2 [30]. Este hecho es fácil de ver considerando el difeomorfismo generado por un vector $\delta u \in \ker P$. De acuerdo con

$$0 = (P\delta u)_{ab} = D_a \delta u_b + D_b \delta u_a - g_{ab} D_c \delta u^c, \quad (4.24)$$

la transformación sería de la forma $\delta_D g_{ab} = (D_c \delta u^c) g_{ab}$, la cual, es la misma transformación que se obtiene de un reescalamiento de Weyl tomando $\delta\lambda = D_c \delta u^c$. De esta manera, tenemos que la intersección entre $\text{Diff}_0(T^2)$ y $\text{Weyl}(T^2)$ corresponde al conjunto (CKV). Esto nos lleva a realizar la descomposición adicional

$$\delta v^a = \delta \tilde{v}^a + \delta \alpha^r \varphi_r^a, \quad (4.25)$$

$$Y^a = \tilde{Y}^a + \beta^r \varphi_r^a, \quad (4.26)$$

³Ortogonalidad definida con respecto a los productos (4.7).

⁴Recordando que, para el toro $\dim_{\mathbb{R}} \ker P^\dagger = \dim_{\mathbb{R}} \ker P = 2$ [29].

⁵Adicionalmente se tuvo en cuenta en la descomposición, que los resultados reportados en la literatura se reproduzcan de manera más directa.

donde $\{\varphi_r\}_{r=1,2}$ es una base de $\ker P$.

El Jacobiano asociado a la descomposición (4.25) es $J = \det^{1/2}\langle\varphi, \varphi\rangle$ y se obtiene en la forma usual [29, 32] por medio de la integral Gaussiana⁶

$$\begin{aligned} 1 &= \int [d\delta v] \exp \{i\langle\delta v, \delta v\rangle\} \\ &= J \int [d\delta\tilde{v}][d\delta\alpha] \exp \{i\langle\delta\tilde{v}, \delta\tilde{v}\rangle + i\langle\delta\alpha^r \varphi_r, \delta\alpha^s \varphi_s\rangle\} \\ &= J \det^{-1/2}\langle\varphi, \varphi\rangle. \end{aligned} \quad (4.27)$$

El mismo Jacobiano se obtiene para la descomposición (4.26).

Hasta aquí, tenemos las descomposiciones ortogonales para la variación de la métrica y la densidad de momento

$$\delta g_{ab} = 2\delta\lambda g_{ab} + (P\delta\tilde{v})_{ab} + \delta\tau^i M_{jk}^{-1} \langle\psi^j, T_i\rangle \psi_{ab}^k, \quad (4.28)$$

$$\pi^{ab} = \frac{1}{2}\pi g^{ab} + \sqrt{|g|}(P\tilde{Y})^{ab} + \sqrt{|g|}p_i \psi^{iab}. \quad (4.29)$$

El siguiente paso es calcular el Jacobiano para el cambio de coordenadas $(g_{ab}; \pi^{ab}) \rightarrow (\lambda, \tilde{v}_a, \alpha_r, \tau_i; \pi, \tilde{Y}^a, \beta^r, p^i)$. Para ello, obtenemos el Jacobiano asociado a la descomposición de la variación de la métrica, empleando la normalización Gaussiana (4.8)

$$\begin{aligned} 1 &= \int [d\delta g_{ab}] \exp \left\{ i \int d^2x \sqrt{|g|} g^{ac} g^{bd} \delta g_{ab} \delta g_{cd} \right\} \\ &= \int J_g [d\delta\lambda][d\delta\tilde{v}][d\delta\tau] \det^{1/2}\langle\varphi, \varphi\rangle \\ &\quad \exp \left\{ 8i\langle\delta\lambda, \delta\lambda\rangle + i\langle\delta\tilde{v}, P^\dagger P\delta\tilde{v}\rangle + i\delta\tau^i \delta\tau^l M_{jk}^{-1} M_{mn}^{-1} \langle\psi^j, T_i\rangle \langle\psi^m, T_l\rangle \langle\psi^k, \psi^n\rangle \right\} \\ &= J_g \det^{1/2}\langle\varphi, \varphi\rangle \det^{-1/2}|P^\dagger P| \det^{-1}\langle\psi, T\rangle \det^{1/2}\langle\psi, \psi\rangle. \end{aligned} \quad (4.30)$$

De forma análoga, utilizamos la normalización Gaussiana (4.9) para obtener el Jacobiano asociado a la descomposición de la densidad de momento

$$\begin{aligned} 1 &= \int [d\pi^{ab}] \exp \left\{ i \int d^2x g_{ac} g_{bd} \pi^{ab} \pi^{cd} / \sqrt{|g|} \right\} \\ &= \int J_\pi [d(\pi/\sqrt{|g|})][d\tilde{Y}][dp] \det^{1/2}\langle\varphi, \varphi\rangle \\ &\quad \exp \left\{ \frac{i}{2}\langle\pi/\sqrt{|g|}, \pi/\sqrt{|g|}\rangle + i\langle\tilde{Y}, P^\dagger P\tilde{Y}\rangle + ip_i p_j \langle\psi^i, \psi^j\rangle \right\} \\ &= J_\pi \det^{1/2}\langle\varphi, \varphi\rangle \det^{-1/2}|P^\dagger P| \det^{-1/2}\langle\psi, \psi\rangle. \end{aligned} \quad (4.31)$$

⁶Para obtener los Jacobianos, se utiliza el hecho de que el Jacobiano calculado en una variedad coincide con el Jacobiano calculado en el espacio tangente a la variedad [30].

Así, el Jacobiano total que se obtiene de (4.30) y (4.31) es

$$J = \frac{\det |P^\dagger P| \det \langle \psi, T \rangle}{\det \langle \varphi, \varphi \rangle}. \quad (4.32)$$

La integral de camino toma entonces la forma

$$\begin{aligned} Z = \mathcal{N} \int & J[d\lambda][d\tau][d(\pi/\sqrt{|g|})][d\tilde{Y}][dp][d\tilde{v}][d\eta]\delta[\sigma^\alpha] \det |\{\chi_\alpha, \sigma^\beta\}| \delta[H_a/\sqrt{|g|}] \\ & \delta[Q/\sqrt{|g|}] \exp \left\{ i \int dt d^2x \left[\left(\frac{1}{2} \pi g^{ab} + \sqrt{|g|} (P\tilde{Y})^{ab} + \sqrt{|g|} p_i \psi^{iab} \right) \dot{g}_{ab} - \eta H_{SD} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde los volúmenes $\int[d\alpha]$ y $\int[d\beta]$ se han absorbido en la constante \mathcal{N} .

En términos de la descomposición (4.29), el Hamiltoniano H_{SD} y la restricción H_a se reescriben como

$$H_{SD} = \frac{\bar{g}^{ac} \bar{g}^{bd} [(PY)_{ab} + p_i \psi_{ab}^i] [(PY)_{cd} + p_j \psi_{cd}^j]}{V} - \frac{V}{2} \langle \pi \rangle^2, \quad (4.34)$$

$$H_a = \sqrt{|g|} (P^\dagger P \tilde{Y})_a - D_a \pi. \quad (4.35)$$

donde \bar{g}_{ab} es la métrica plana en (3.17), y se ha tenido en cuenta que $\bar{g}^{ab} \psi_{ab}^i = 0$.

Para evaluar la integral con respecto a \tilde{Y} , aprovechamos la función delta $\delta[H_a/\sqrt{|g|}] = \delta[(P^\dagger P \tilde{Y})_a - D_a \pi/\sqrt{|g|}]$, obteniendo⁷

$$\int [d\tilde{Y}] \delta \left[(P^\dagger P \tilde{Y})_a - D_a \pi/\sqrt{|g|} \right] \det |P^\dagger P| F(\tilde{Y}) = F(\tilde{Y}) \Big|_{\tilde{Y}^a = (P^\dagger P)^{-1} D_a \pi/\sqrt{|g|}}. \quad (4.36)$$

La integral con respecto a π , se evalúa usando la función $\delta[Q/\sqrt{|g|}]$. Para ello escribimos

$$Q(x) = \sqrt{|g|} \mathcal{P}(\pi/\sqrt{|g|}), \quad (4.37)$$

donde $\mathcal{P}(f) = f - \langle f \rangle$. Adicionalmente realizamos la descomposición

$$\pi/\sqrt{|g|} = \hat{\pi} + \langle \pi \rangle, \quad (4.38)$$

de esta forma

$$\begin{aligned} \int [d(\pi/\sqrt{|g|})] \delta[\mathcal{P}(\pi/\sqrt{|g|})] F(\pi/\sqrt{|g|}) &= \int [d\hat{\pi}] [d\langle \pi \rangle] \delta[\mathcal{P}(\hat{\pi})] F(\hat{\pi}, \langle \pi \rangle) \\ &= \int [d\langle \pi \rangle] F(\hat{\pi} = 0, \langle \pi \rangle). \end{aligned} \quad (4.39)$$

⁷Donde se ha usado $\int d^n x \delta[f(x)] = \left| \det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) \right|_{f=0}^{-1}$.

Con los resultados (4.36) y (4.39), el término cinético

$$\int d^2x \left(\frac{1}{2} \pi g^{ab} + \sqrt{|g|} (P\tilde{Y})^{ab} + \sqrt{|g|} p_i \psi^{iab} \right) \dot{g}_{ab}, \quad (4.40)$$

toma la forma

$$\begin{aligned} \int d^2x \left(\frac{1}{2} \langle \pi \rangle g^{ab} + \sqrt{|g|} p_i \psi^{iab} \right) \dot{g}_{ab} &= \langle \pi \rangle \dot{V} + \int d^2x \sqrt{|g|} p_i \psi^{iab} T_{jab} \dot{\tau}^j \\ &= \langle \pi \rangle \dot{V} + p_i \langle \psi^i, T_j \rangle \dot{\tau}^j. \end{aligned} \quad (4.41)$$

En la integral de camino (4.33), el único término dependiente de \tilde{v} es $\delta[\sigma_\alpha] \det |\{\chi^\alpha, \sigma_\beta\}|$, de forma que la integral con respecto a \tilde{v} está dada por⁸ $\int [d\tilde{v}] \delta[\sigma_\alpha] \det |\{\chi^\alpha, \sigma_\beta\}| = 1$, con esto y con lo obtenido en (4.36), (4.39) y (4.41), la integral de camino (4.33) se reduce a

$$\begin{aligned} Z &= \mathcal{N} \int [d\lambda][d\tau][d\langle \pi \rangle][dp][d\eta] \frac{\det \langle \psi, T \rangle}{\det \langle \varphi, \varphi \rangle} \\ &\quad \exp \left\{ i \int dt \left(p_i \langle \psi^i, T_j \rangle \dot{\tau}^j + \langle \pi \rangle \dot{V} - \eta \int d^2x H_{SD} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

con

$$H_{SD} = \frac{\bar{g}^{ac} \bar{g}^{bd} p_i \psi_{ab}^i p_j \psi_{cd}^j}{V} - \frac{V}{2} \langle \pi \rangle^2. \quad (4.43)$$

Elegimos ahora la métrica plana \bar{g}_{ab} en términos de los parámetros de Teichmüller (τ_1, τ_2) , como [29]

$$\bar{g}_{ab} = \frac{1}{\tau_2} \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_1^2 + \tau_2^2 \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

con inversa

$$\bar{g}^{ab} = \frac{1}{\tau_2} \begin{pmatrix} \tau_1^2 + \tau_2^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Con esta elección y de acuerdo con (4.17), las componentes T_{ab}^i toman la forma explícita

$$T_{ab}^1 = \frac{e^{2\lambda}}{\tau_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2\tau_1 \end{pmatrix}, \quad T_{ab}^2 = \frac{e^{2\lambda}}{\tau_2^2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & \tau_2^2 - \tau_1^2 \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

Teniendo en cuenta que la métrica \bar{g}_{ab} es plana y las componentes T_{ab}^i no dependen de las coordenadas x^a , entonces $(P^\dagger T^i)_a = -2D^b T_{ab}^i = 0$, de esta forma, los T_{ab}^i en

⁸Este resultado se obtiene eligiendo de forma adecuada las condiciones gauge σ_α , la cual no se realiza de manera explícita ya que de acuerdo con el teorema de Fradkin y Vilkovisky [31] la integral de camino es independiente de la escogencia gauge.

(4.46) nos sirven para escoger una base $\{\psi^r\}$ de $\ker P^\dagger$. Por conveniencia, la elegimos de manera que satisfaga $\langle \psi^i, T_j \rangle = \delta_j^i$

$$\psi_{ab}^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & 2\tau_1\tau_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_{ab}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & \tau_2^2 - \tau_1^2 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Así, reemplazando (4.45) y (4.47) en (4.43), el Hamiltoniano de la Dinámica de Formas pasa a ser

$$H_{SD} = \frac{\tau_2^2}{2V}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{V}{2}\langle \pi \rangle^2. \quad (4.48)$$

Esta expresión coincide con la obtenida en [22].

4.1.1. Sistema reducido del tipo (τ, V)

Tomando $\lambda \equiv \hat{\phi}_0 + \lambda = \frac{1}{2} \ln V$ (ver (3.22)), la integral sobre λ se cambia por una integral sobre V , con lo cual obtenemos la integral de camino en un espacio de fase reducido cuyas variables dinámicas son $(\tau^i, V, p_i, \langle \pi \rangle)$

$$Z = \mathcal{N} \int [dV/V] [d\langle \pi \rangle] [d\tau] [dp] [d\eta] \det^{-1} \langle \varphi, \varphi \rangle \exp \left\{ i \int dt \left(p_i \dot{\tau}^i + \langle \pi \rangle \dot{V} - \eta \tilde{H}_{SD} \right) \right\}, \quad (4.49)$$

donde $\langle \pi \rangle$ es el momento conjugado a V . Este resultado es equivalente a la integral de camino para el sistema reducido del tipo (τ, V) obtenida en [25, 26], donde

$$\tilde{H}_{SD} = \frac{\tau_2^2}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{V^2}{2}\langle \pi \rangle^2, \quad (4.50)$$

coincide con el Hamiltoniano reducido.

4.1.2. Sistema reducido del tipo τ

Por otro lado, integrando sobre η e imponiendo la condición gauge $\sigma = \langle \pi \rangle - t$ (Tiempo de York), a través de la introducción del factor $\delta[\sigma] \det |\{H_{SD}, \sigma\}|$, obtenemos

$$Z = \mathcal{N} \int [dV/V] [d\langle \pi \rangle] [d\tau] [dp] \delta[H_{SD}/\sqrt{|g|}] \det^{-1} \langle \varphi, \varphi \rangle \delta[\sigma] \det |\{H_{SD}, \sigma\}| \exp \left\{ i \int dt \left(p_i \dot{\tau}^i + \langle \pi \rangle \dot{V} \right) \right\}. \quad (4.51)$$

De esta forma, podemos utilizar la función $\delta[\sigma]$ para realizar la integral sobre $\langle \pi \rangle$. La integral sobre V se evalúa fácilmente escribiendo

$$\delta[H_{SD}/\sqrt{|g|}] = \delta[V - V^*] \frac{\tau_2 \sqrt{p_1^2 + p_2^2}}{\langle \pi \rangle^3}, \quad (4.52)$$

donde V^* soluciona $H_{SD} = 0$.

De manera que, si adicionalmente elegimos la base $\{\varphi_r\}$ tal que $\det \langle \varphi, \varphi \rangle = 1$, obtenemos la integral de camino en el espacio de fase reducido con variables dinámicas (τ^i, p_i)

$$Z = \mathcal{N} \int [d\tau][dp] \exp \left\{ i \int dt (p_i \dot{\tau}^i - H_{\text{York}}) \right\}, \quad (4.53)$$

donde

$$H_{\text{York}} \equiv V^* = \frac{\tau_2 \sqrt{p_1^2 + p_2^2}}{t}, \quad (4.54)$$

es el Hamiltoniano de York. Este resultado coincide con la integral de camino para el sistema reducido del tipo τ , que se obtiene en [27, 28].

El procedimiento seguido en este capítulo se puede considerar estandar [20, 29], sin embargo las diferencias entre la teoría de Dinámica de Formas y la formulación ADM llevan a diferencias en los calculos. Por ejemplo la restriccion 4.5 que aparece de manera natural como generadora de la simetría conforme en la Dinámica de Formas, se introduce en [26] como condición gauge. Adicionalmente el hamiltoniano reducido (4.50) se obtiene de una manera más directa, gracias al Hamiltoniano de la Dinámica de Formas H_{SD} .

El análisis para superficies de género superior, seguiría la misma línea que se presentó en este capítulo. En principio, la dificultad vendría del hecho de que, para superficies de género superior, la ecuación de Lichnerowicz-York no tiene solución explícita. Sin embargo, el inconveniente se resuelve debido a que, para estas superficies es posible construir la Dinámica de Formas de manera perturbativa, obteniendo el Hamiltoniano a través de una expansión a volúmenes grandes [22].

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

Se presentó una revisión de los aspectos básicos del método de mejor apareamiento y del método general para obtener la teoría de Dinámica de Formas a partir de la formulación ADM de la Relatividad General, a través del procedimiento de intercambio de simetrías.

Se aplicó el procedimiento de intercambio de simetrías para obtener explícitamente la Dinámica de Formas en el toro en $2 + 1$ dimensiones.

Posteriormente la integral de camino para el toro en $2 + 1$ dimensiones, se llevó del espacio de fase $\Gamma(g_{ab}, \pi^{ab})$ al espacio de fase reducido $\Gamma(\tau^i, V, p_i, \langle \pi \rangle)$, encontrando un resultado compatible con el denominado sistema del tipo (τ, V) en [25, 26]. Mostrando además que el Hamiltoniano de la Dinámica de Formas coincide con el Hamiltoniano reducido.

Después de obtener el sistema del tipo (τ, V) , se mostró que por medio del Hamiltoniano de la Dinámica de Formas y la condición gauge de York ($\sigma = \langle \pi \rangle - t$), es directa la reducción de la integral de camino al espacio de fase $\Gamma(\tau^i, p_i)$. El cual se denota como sistema del tipo τ [27, 28].

Con este trabajo se muestra que, con la teoría de Dinámica de Formas se reproducen los resultados obtenidos en el caso de la integral de camino en el espacio de fase reducido para gravedad $2 + 1$ dimensional en el 2 toro en la formulación ADM, lo cual pretende aportar a mejorar la comprensión que se tiene de la teoría de Dinámica de Formas.

Como posible continuación del trabajo, se podría considerar la integral de camino para superficies de género superior, aprovechando el hecho de que para estos casos, la Dinámica de Formas se puede construir de manera perturbativa, como se ha mostrado en [22].

Apéndice A

Método de Dirac para sistemas restringidos

En este apéndice se siguen los argumentos propuestos por Dirac en [33]. Adicionalmente se sigue como referencia a [34].

Consideremos la acción

$$S = \int L \, dt . \quad (\text{A.1})$$

Los momentos canónicos están dados por

$$p^a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} , \quad (\text{A.2})$$

si esta relación es invertible, las velocidades pueden ser expresadas en términos de los momentos. En caso contrario tenemos las restricciones

$$\chi_a(q, p) = 0 . \quad (\text{A.3})$$

Estas condiciones son conocidas como restricciones primarias.

El Hamiltoniano de la teoría lo obtenemos de la transformación de Legendre

$$H = p^a \dot{q}_a - L , \quad (\text{A.4})$$

debido a las restricciones (A.3), este Hamiltoniano no está determinado en forma única. El formalismo permanece inalterado si agregamos al Hamiltoniano una combinación lineal de las restricciones. De forma que, el Hamiltoniano total está dado por

$$H_T = H + N^a \chi_a , \quad (\text{A.5})$$

donde los coeficientes N^a son multiplicadores de Lagrange que deben ser determinados.

Resulta conveniente escribir las restricciones (A.3) en la forma

$$\chi_a \approx 0 , \quad (\text{A.6})$$

para enfatizar que están numéricamente restringidas a ser cero, pero su paréntesis de Poisson con las variables canónicas es diferente de cero. Dos variables dinámicas f y g se dicen débilmente iguales, $f \approx g$, si coinciden en la subvariedad definida por las restricciones (A.3). La evolución de una variable dinámica f está dada por

$$\dot{f} \approx \{f, H_T\}. \quad (\text{A.7})$$

Al imponer que las restricciones de la teoría sean invariantes en el tiempo, obtenemos las condiciones

$$\dot{\chi}_a \approx \{\chi_a, H\} + N^b \{\chi_a, \chi_b\} \approx 0, \quad (\text{A.8})$$

estas condiciones permiten determinar los multiplicadores de Lagrange o conducen a nuevas restricciones conocidas como restricciones secundarias. De igual forma, la invariancia de las restricciones secundarias puede conducir a restricciones terciarias y así sucesivamente. La distinción entre restricciones primarias y secundarias no es importante, por lo cual, todas las restricciones se denotan como χ_k .

Estas restricciones se dividen en dos clases: las restricciones cuyo paréntesis de Poisson con todas las restricciones (incluidas ellas mismas) se anula débilmente, son conocidas como restricciones de primera clase. En caso contrario son restricciones de segunda clase. La presencia de restricciones primarias de primera clase implica que existen multiplicadores de Lagrange que no pueden ser determinados [34].

En [33] se demuestra además que las restricciones de primera clase están relacionadas con la invariancia gauge de la teoría, la cual puede ser usada para convertir las restricciones de primera clase en restricciones de segunda clase. Después de fijar las condiciones gauge, las restricciones se denotan como χ_α .

Debido a que el paréntesis de Poisson entre las restricciones y las variables dinámicas no es necesariamente cero, se introduce el paréntesis de Dirac definido como

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \{f, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, g\}, \quad (\text{A.9})$$

donde

$$C_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\}, \quad (\text{A.10})$$

siendo $C^{\alpha\beta}$ la matriz inversa de $C_{\alpha\beta}$.

Con esta definición, el paréntesis de Dirac entre las restricciones y las variables dinámicas es cero. Después de la sustitución de los paréntesis de Poisson por los de Dirac, las restricciones pueden ser fijadas a cero. La cuantización de la teoría se lleva a cabo de la forma usual reemplazando los paréntesis de Dirac por conmutadores o anticonmutadores, según sea el caso.

Bibliografía

- [1] H. Gomes, S. Gryb y T. Koslowski, *Einstein gravity as a 3D conformally invariant theory*, Class. Quantum Grav. 28.4 (2011) 045005, arXiv:1010.2481v2 [gr-qc].
- [2] J. Barbour, *Shape Dynamics. An Introduction*, en *Quantum Field Theory and Gravity*, F. Finster, O. Müller, M. Nardmann, J. Tolksdorf y E. Zeidler (eds.), Springer, Basel (2012) 257-297.
- [3] R. Arnowitt, S. Deser y C. Misner, in *Gravitation: an Introduction to Current Research*, C. M. DeWitt y J. A. Wheeler (eds.), Wiley, New York (1962), R. Arnowitt, S. Deser y C. Misner, *The Dynamics of general relativity*, (2004), arXiv:gr-qc/0405109v1.
- [4] H. Gomes y T. Koslowski, *The Link between General Relativity and Shape Dynamics*, Class. Quantum Grav. 29.7 (2012) 075009, arXiv:1101.5974v3 [gr-qc].
- [5] J. J. W. York, *Gravitational degrees of freedom and the initial-value problem*, Phys. Rev. Lett. **26** (1971) 1656-1658.
- [6] J. J. W. York, *Role of conformal three geometry in the dynamics of gravitation*, Phys. Rev. Lett. **28** (1972) 1082-1085.
- [7] E. Mach, *The Science of Mechanics*, Open Court, Chicago, (1960).
- [8] J. Barbour, *The Definition of Mach's Principle*, Found. Phys. **40** (2010) 1263-1284, arXiv:1007.3368v1 [gr-qc].
- [9] J. Barbour y N. O. Murchadha, *Conformal Superspace: the configuration space of general relativity*, (2010), arXiv:1009.3559v1 [gr-qc].
- [10] H. Gomes, S. Gryb, T. Koslowski y F. Mercati, *The gravity/CFT correspondence*, (2013), arXiv:1105.0938v2 [gr-qc].
- [11] H. Gomes y T. Koslowski, *Shape Dynamics and Gauge-Gravity Duality*, (2013), arXiv:1301.7688v1 [gr-qc].

-
- [12] C. J. Isham, en *Integrable systems, quantum groups, and quantum field theories*. Springer Netherlands (1993) 157-287, arXiv:gr-qc/9210011.
 - [13] E. Anderson, *Problem of time in quantum gravity*, Annalen der Physik 524, no. 12 (2012) 757-786, arXiv:1009.2157 [gr-qc].
 - [14] C. Lanczos, *The variational principles of mechanics* Vol. 4, Courier Dover Publications (1970).
 - [15] T. Thiemann, *Modern canonical quantum general relativity*, Cambridge University Press (2007).
 - [16] E. Anderson, J. Barbour, B. Z. Foster, B. Kelleher y N. Ó. Murchadha, *The physical gravitational degrees of freedom*, Class. Quantum Grav. 22.9 (2005) 1795.
 - [17] N. O'Murchadha y J. J. W. York, *Existence and uniqueness of solutions of the Hamiltonian constraint of general relativity on compact manifolds*, J. Math. Phys. 14 (1973) 1551-1557.
 - [18] J. J. W. York, *Conformally invariant orthogonal decomposition of symmetric tensors on Riemannian manifolds and the initial-value problem of general relativity*, J. Math. Phys. 14 (1973) 456-464.
 - [19] N. O'Murchadha, *Readings of the Lichnerowicz-York equation*, arXiv:gr-qc/0502055 (2005).
 - [20] S. Carlip, *Quantum Gravity in 2+1 Dimensions*, Cambridge University Press, Cambridge (2003).
 - [21] E. Martinec, *Soluble systems in quantum gravity*, Phys. Rev. D **30** (1984) 1198-1204.
 - [22] T. Budd y T. Koslowski, *Shape Dynamics in 2+1 Dimensions*, Gen. Rel. Grav. 44.7 (2012) 1615-1636, arXiv:1107.1287v1 [gr-qc].
 - [23] H. M. Farkas y I. Kra, *Riemann surfaces*, Springer New York (1992).
 - [24] L.D. Faddeev y A.A. Slavnov, *Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory*, Benjamin-Cummings, Reading, Massachusetts (1980), Chapter 3.
 - [25] A. Hosoya y K. Nakao, Prog. Theor. Phys. **84**, 739 (1990).
 - [26] M. Seriu, *Partition Function for (2+1)-Dimensional Einstein Gravity*, Phys. Rev. D 55.2 (1997) 781, arXiv:gr-qc/9609052v2.
 - [27] V. Moncrief, *Reduction of the Einstein equations in 2+1 dimensions to a Hamiltonian system over Teichmüller space*, J. Math. Phys. 30(12) (1989) 2907-2914.

-
- [28] S. Carlip, *Class. Quantum Grav.* **12**, 2201 (1995).
 - [29] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Addison-Wesley, Redwood City, CA, (1992).
 - [30] M. Nakahara, *Geometry, topology, and physics*, CRC Press (2003).
 - [31] E. S. Fradkin y G. A. Vilkovisky, *Nucl. Phys. Rev.* **D8**, 4241 (1973).
 - [32] O. Alvarez, *Nucl. Phys.* **B216**, 125 (1983).
 - [33] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University (1964).
 - [34] M. Henneaux y C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press (1992).